

RAYONNEMENT THERMIQUE DES SURFACES DE REVOLUTION

JEAN J. BERNARD

Laboratoire d'Aérodynamique du C.N.R.S. 92-Meudon, France

et

JEANNE GENOT

Office National d'Etudes et Recherches Aérospatiales, 92-Chatillon-sous-Bagneux, France

(Reçu le 27 Novembre 1970)

Résumé—Les fonctions d'échange qui interviennent dans l'évaluation des échanges de chaleur par rayonnement sont calculées formellement pour des couples d'éléments annulaires des surfaces de révolution susceptibles de schématiser des propulseurs, leur raccordement à la paroi d'un missile et leur ouverture sur le milieu ambiant. La limitation des surfaces donnant effectivement lieu à un rayonnement mutuel et la détermination des fonctions d'échange correspondantes font intervenir trois paramètres caractéristiques liés à la position des deux éléments annulaires et à la forme géométrique de la méridienne.

Un exemple simple illustre l'application pratique de cette méthode.

NOTATIONS

\mathcal{A} ,	fonction définie par l'équation (6) [sans dimension];
\mathcal{B} ,	fonction définie par l'équation (7) [sans dimension];
d ,	distance [m];
E ,	fonction d'échange définie par l'équation (3),
Q ,	puissance calorifique échangée par rayonnement [W];
r ,	coordonnée polaire [m];
S ,	surface rayonnante [m ²];
T ,	température [°K];
x, y, z ,	coordonnées cartésiennes [m];
Z ,	fonction définie par l'équation (4) [sans dimension];
α ,	angle [degré];
β ,	angle [degré];
ε ,	caractéristique d'émission des surfaces rayonnantes [sans dimension];
\mathcal{E}_{12} ,	fonction définie par l'équation (5) [sans dimension];
Θ, θ ,	angle [degré];
σ ,	constante de Stefan-Boltzmann

[5.672 W . m⁻² . °K⁻⁴].

Indices

1,	relatif à un élément de surface;
2,	relatif à un élément de surface différent du précédent;
12,	relatif à un rayonnement mutuel entre les éléments 1 et 2 précédents.

INTRODUCTION

LES ÉCHANGES directs de chaleur par rayonnement qui s'établissent entre les parois internes ou les parois externes des missiles ou encore entre ces parois et le milieu ambiant ont pris de l'importance dès que les propulseurs ont dû fonctionner à des niveaux de température plus élevés pour accroître la vitesse de vol. L'échauffement cinétique produit par la convection thermique de l'air sur les parois, très important aux grandes vitesses, donne également un intérêt au rayonnement des surfaces qui permet d'évacuer de la chaleur vers le milieu extérieur. Enfin, le refroidissement des véhicules spatiaux est essentiellement assuré par le rayonnement [1]. Ainsi, les calculs du bilan thermique et la définition du champ de températures qui conditionne la tenue des matériaux nécessitent,

dans chaque cas, l'évaluation des fonctions d'échange par rayonnement mutuel des éléments de surface constituant ces missiles.

La symétrie de révolution se rencontre très fréquemment, tant dans la géométrie des missiles que dans les distributions de température: il est alors possible, en coordonnées cylindriques, de procéder aux intégrations selon les angles polaires et de définir ainsi la fonction d'échange relative à deux éléments annulaires d'une surface de révolution ou d'une association coaxiale de surfaces de révolution pouvant comporter comme cas limites un plan perpendiculaire à l'axe ou un demi-espace limité par un tel plan.

1. PHENOMENES DE RAYONNEMENT THERMIQUE SUR LES MISSILES

Dans le bilan thermique d'un missile, deux types d'échange de chaleur par rayonnement doivent s'introduire séparément ou simultanément:

—les rayonnements mutuels des éléments de la surface interne et leur rayonnement vers les surfaces extérieures ou vers le milieu ambiant;

—les rayonnements des éléments de la surface externe (propulseur et cellule) sur les autres éléments visibles et vers le milieu ambiant.

1.1 Fonction d'échange entre surfaces rayonnantes

Entre deux éléments de surface dS_1 et dS_2 , centrés en M_1 et M_2 , respectivement aux températures T_1 et T_2 (Fig. 1), l'échange de chaleur par rayonnement mutuel s'exprime selon la formule bien connue [2]:

$$dQ = \sigma(\varepsilon_1 T_1^4 - \varepsilon_2 T_2^4) \frac{dS_1 \cdot dS_2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{\pi d^2} \quad (1)$$

dans laquelle:

- σ est la constante de Stefan-Boltzmann,
- ε_1 et ε_2 sont les caractéristiques d'émission des surfaces (comprises entre 0 et 1),
- α_1 et α_2 sont respectivement les angles avec la direction $\overrightarrow{M_1 M_2}$ de $\overrightarrow{N_1}$, normale extérieure à

dS_1 et $\overrightarrow{N_2}$, normale extérieure à dS_2 : $\alpha_1 = (\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{M_1 M_2})$, $\alpha_2 = (\overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{M_2 M_1})$,

— d est la distance $M_1 M_2$.

L'expression (1) suppose:

—une émission des surfaces selon la loi de Lambert,

—un pouvoir réflecteur des surfaces nul,

—une absorption nulle du milieu environnant.

Dans le cas où dS_1 et dS_2 appartiennent à deux surfaces S_1 et S_2 , isothermes aux températures T_1 et T_2 , la quantité de chaleur échangée s'exprime par:

$$Q = \sigma(\varepsilon_1 T_1^4 - \varepsilon_2 T_2^4) \times \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{\pi d^2} dS_1 \cdot dS_2 \quad (2)$$

C'est à l'intégrale

$$E_{12} = \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{\pi d^2} dS_1 \cdot dS_2 \quad (3)$$

qu'est donné le nom de fonction d'échange [3].

1.2 Cas des surfaces de révolution

Lorsqu'il s'agit d'une surface non isotherme mais de révolution ou d'une association coaxiale de surfaces de révolution non isothermes, et lorsque la distribution des températures est également de révolution, il est possible de définir comme précédemment des fonctions d'échange relatives à des zones élémentaires, isothermes et d'épaisseurs dz_1 , dz_2 . Ces fonctions d'échange, de la forme $\mathcal{E}_{12}(z_1, z_2) \cdot dz_1 \cdot dz_2$, dépendent évidemment des cotes z_1 et z_2 des tranches considérées et sont obtenues par des intégrations portant sur les angles polaires θ_1 et θ_2 des centres M_1 et M_2 des éléments dS_1 et dS_2 : en fait, ces intégrations se réduisent au produit par 2π d'une seule intégrale portant sur la différence θ de ces angles polaires, l'origine de ces angles étant évidemment indifférente par raison de symétrie. On peut ainsi prendre pour coordonnées cartésiennes (Fig. 1):

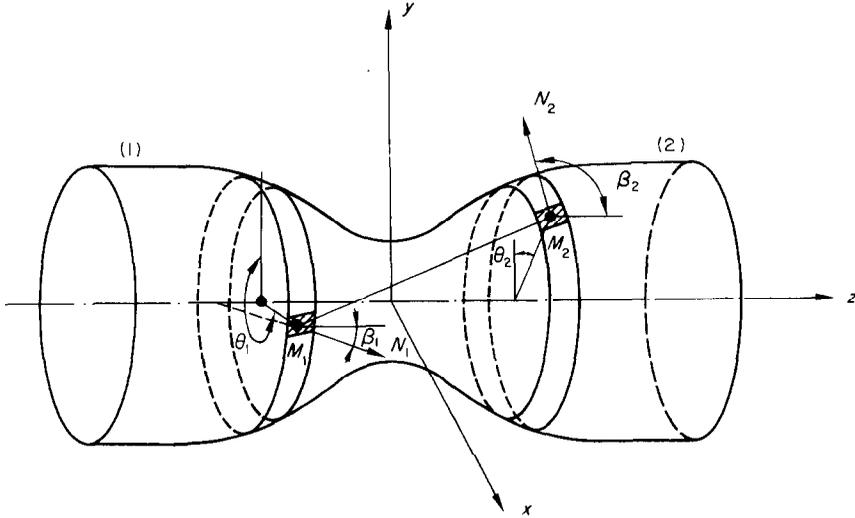


FIG. 1. Rayonnement mutuel entre deux éléments $dS_1 (M_1)$ et $dS_2 (M_2)$ d'une surface de révolution.

— du point $M_1: r_1; 0; z_1$

— du point $M_2: r_2 \cos \theta; r_2 \sin \theta; z_2$;

de même, les composantes cartésiennes des vecteurs unitaires N_1 et N_2 seront :

— pour $N_1: \sin \beta_1; 0; \cos \beta_1$

— pour $N_2: \sin \beta_2 \cdot \cos \theta; \sin \beta_2 \cdot \sin \theta; \cos \beta_2$,

les normales extérieures correspondant aux $\sin \beta$ positifs.

On aura ainsi les expressions suivantes des $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha_1 = \left[\cos \theta - \frac{r_1 \sin \beta_1 + (z_1 - z_2) \cdot \cos \beta_1}{r_2 \sin \beta_1} \right] \times \frac{r_2 \sin \beta_1}{d},$$

$$\cos \alpha_2 = \left[\cos \theta - \frac{r_2 \sin \beta_2 + (z_2 - z_1) \cdot \cos \beta_2}{r_1 \sin \beta_2} \right] \times \frac{r_1 \sin \beta_2}{d},$$

et des éléments de surface dS_1 et dS_2 de la forme :

$$dS = \frac{r d\theta dz}{\sin \beta} = \frac{r d\theta dr}{\cos \beta},$$

la distance d étant donnée par :

$$d^2 = 2r_1 r_2 \left[\frac{r_1^2 + r_2^2 + (z_1 - z_2)^2}{2r_1 r_2} - \cos \theta \right].$$

On voit ainsi apparaître les trois paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{r_1 \sin \beta_1 + (z_1 - z_2) \cos \beta_1}{r_2 \sin \beta_1} \\ &= 1 + \frac{(r_1 - r_2) \sin \beta_1 + (z_1 - z_2) \cos \beta_1}{r_2 \sin \beta_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \frac{r_2 \sin \beta_2 + (z_2 - z_1) \cos \beta_2}{r_1 \sin \beta_2} \\ &= 1 + \frac{(r_2 - r_1) \sin \beta_2 + (z_2 - z_1) \cos \beta_2}{r_1 \sin \beta_2} \end{aligned}$$

$$Z = \frac{r_1^2 + r_2^2 + (z_1 - z_2)^2}{2r_1 r_2} \quad (4)$$

qui permettent d'exprimer simplement la fonction d'échange \mathcal{E}_{12} par l'intégrale élémentaire :

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{1}{2} \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \frac{(\cos \theta - \cos \theta_1)(\cos \theta - \cos \theta_2)}{(Z - \cos \theta)^2} d\theta \quad (5)$$

$$\theta_l = \inf \left\{ \text{Arc cos} \frac{r_1 \sin \beta_1 + (z_1 - z_2) \cos \beta_1}{r_2 \sin \beta_1}; \text{Arc cos} \frac{r_2 \sin \beta_2 + (z_2 - z_1) \cos \beta_2}{r_1 \sin \beta_2} \right\}$$

dans laquelle θ_l est un angle limite de visibilité d'un point M_2 depuis un point M_1 .

1.3 Limitations

Il est en effet exceptionnel qu'un parallèle d'une surface de révolution soit vu en entier

Restriction locale sur la méridienne. Cet angle limite suppose évidemment $\cos \theta_1 < 1$ et $\cos \theta_2 < 1$,* ce qui se traduit par les restrictions locales concernant la méridienne:

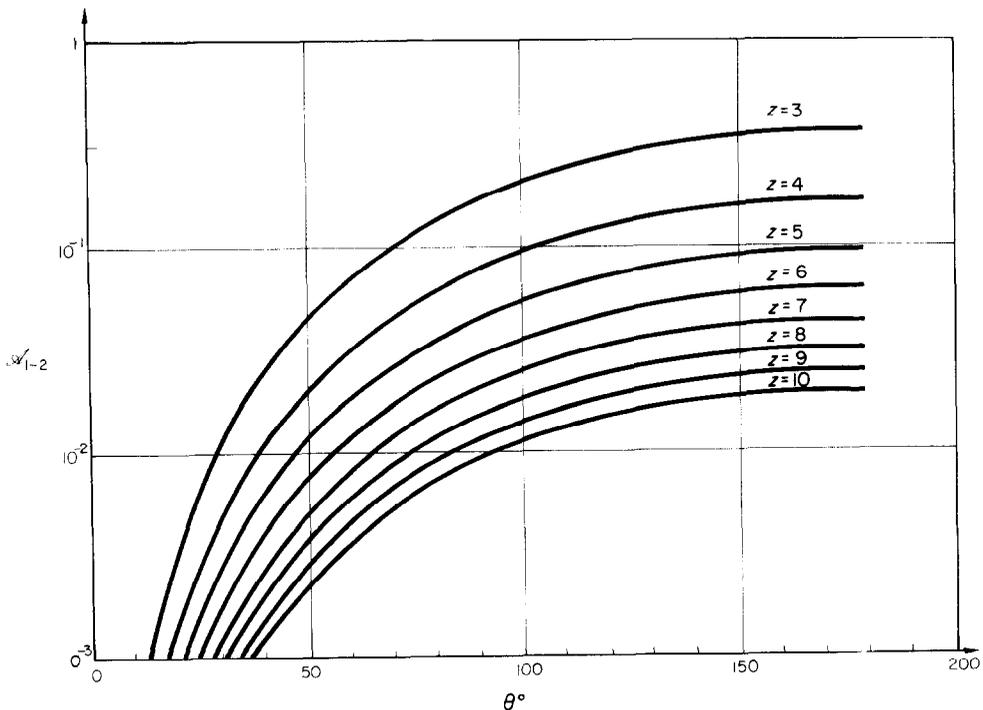


FIG. 2. Valeurs de \mathcal{E}_{12} en fonction de θ et Z .

d'un point de cette surface, ce qui conduit à plusieurs restrictions.

Restriction sur l'intervalle d'intégration θ_l . Deux éléments de surface ne peuvent présenter de rayonnement mutuel extérieur que si les deux $\cos \alpha$ sont positifs, soit pour

$$\cos \theta > \sup \{ \cos \theta_1, \cos \theta_2 \}$$

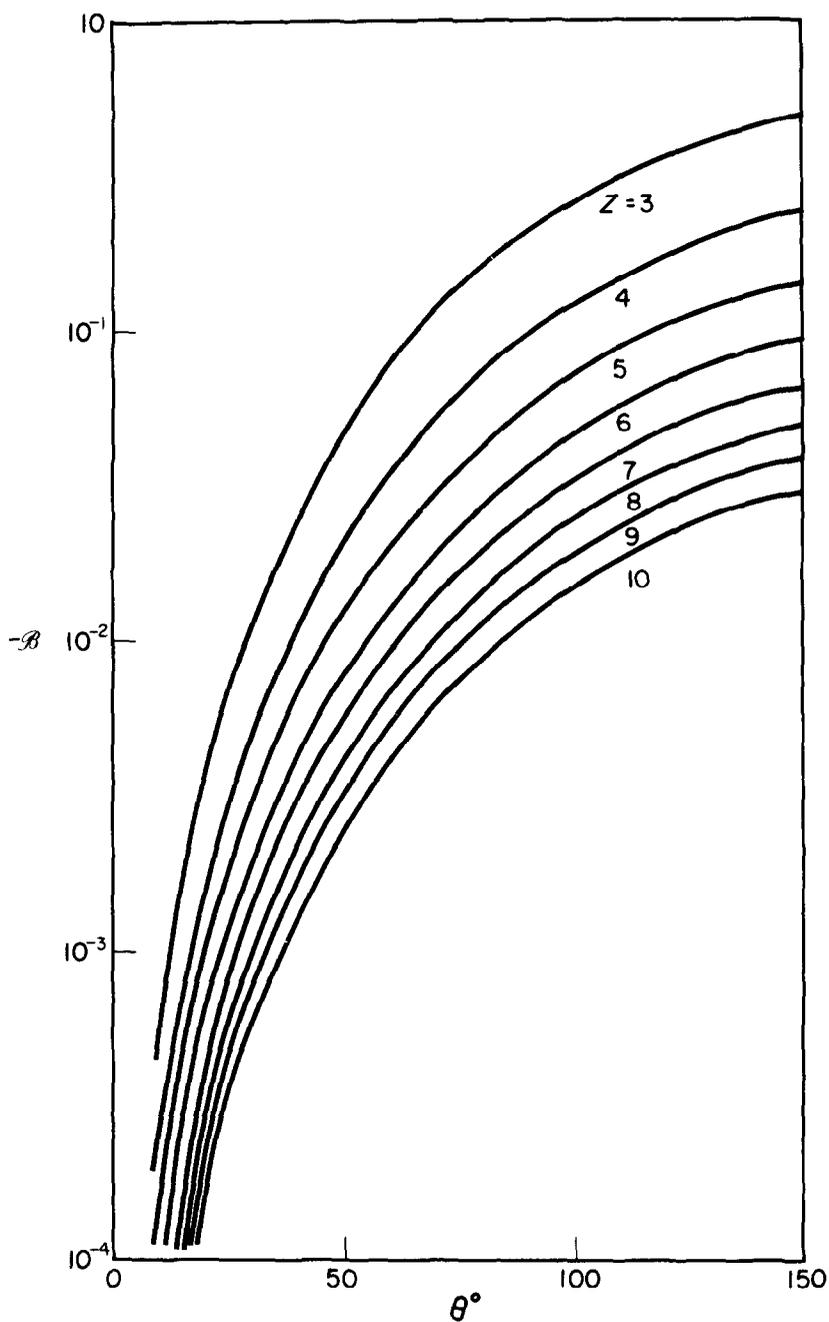
ce qui définit l'angle limite θ_l :

$$\inf \left\{ \cot \beta_1; \cot \beta_2 \right\} > \frac{r_1 - r_2}{z_2 - z_1} \quad (\text{pour } z_2 > z_1)$$

$$\sup \left\{ \cot \beta_1; \cot \beta_2 \right\} < \frac{r_1 - r_2}{z_2 - z_1} \quad (\text{pour } z_2 < z_1)$$

qui sont évidentes géométriquement.

* La limitation inférieure $\cos \theta_1 > -1$ et $\cos \theta_2 > -1$ n'a pas à être prise en compte car θ_1 et θ_2 n'ont pas de définition géométrique propre.

FIG. 3. Valeurs de B_{12} en fonction de θ et Z .

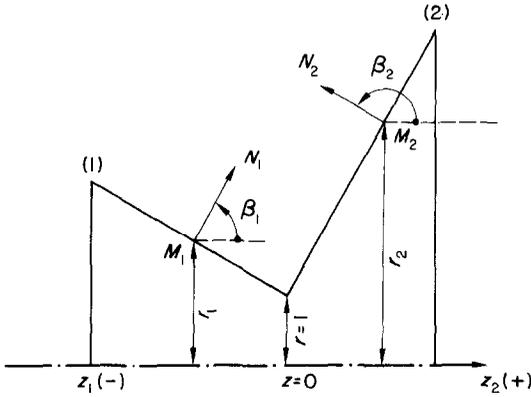


FIG. 4. Modèle simplifié de tuyère.

Restriction globale sur la méridienne. Outre les deux restrictions précédentes, il faut encore que les rayons joignant deux points M_1 et M_2 de cotes z_1 et z_2 ne soient pas interceptés par la portion de la surface comprise entre ces cotes; géométriquement, cela signifie que cette portion de surface doit être intérieure à l'hyperboloïde de révolution engendré par les rayons

M_1M_2 ; cette restriction pourrait conduire, dans certains cas, à une valeur limite de θ inférieure au θ_1 précédemment défini mais cela ne se produit dans aucune des configurations étudiées et semble exceptionnel: en pratique, il suffira généralement de vérifier graphiquement que la méridienne de la surface étudiée reste à l'intérieur de l'hyperbole passant par les points M'_1 et M'_2 des parallèles de M_1 et M_2 et de directions asymptotiques définies par:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_1}{(z_2 - z_1)^2}$$

Il va de soi que le cas du rayonnement intérieur à la surface conduit aux limitations complémentaires de celles-ci.

1.4 Expression des résultats

Les limites symétriques $\pm \theta_1$ de l'intégrale (5) étant, en valeur absolue, le plus petit des angles θ_1 et θ_2 , l'expression \mathcal{E}_{12} est linéaire par rapport au cos du plus grand; pour simplifier la présentation de résultats utilisables, ce dernier est désigné par Θ et \mathcal{E}_{12} peut alors être exprimée

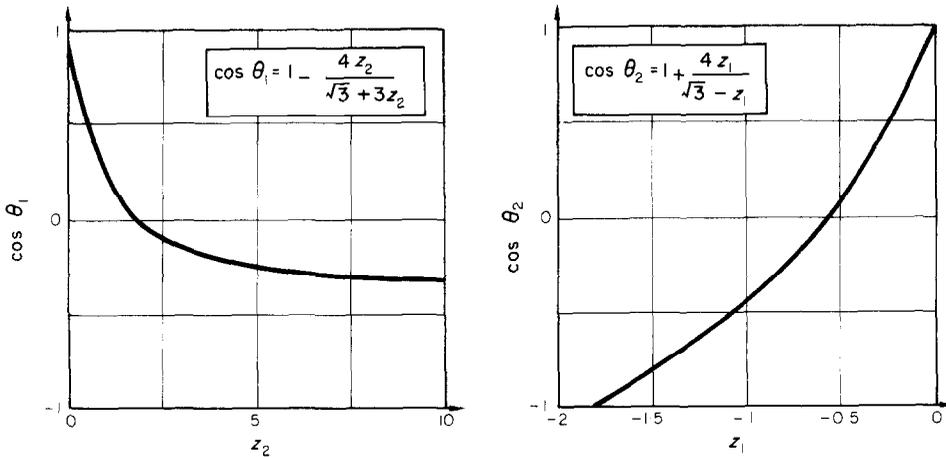


FIG. 5. Valeurs de $\cos \theta_1$ en fonction de z_2 et valeurs de $\cos \theta_2$ en fonction de z_1 pour le modèle simplifié.

sous la forme :

$$\mathcal{E}_{12} = \mathcal{A}_{12}(\theta_1, Z) + \mathcal{B}_{12}(\theta_1, Z) \cdot \cos \Theta$$

au moyen des deux fonctions universelles de θ_1 et Z , \mathcal{A}_{12} et \mathcal{B}_{12} qui ont une expression analytique simple :

$$\mathcal{A}_{12} = \theta_1 + \frac{Z \sin \theta_1}{Z^2 - 1} - 2 \frac{Z^3 - 2Z + \cos \theta_1}{(Z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \times \left[\text{Arc tg} \sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}} \text{tg} \frac{\theta_1}{2} \right], \quad (6)$$

$$\mathcal{B}_{12} = -\frac{\sin \theta_1}{Z^2 - 1} + 2 \frac{Z \cos \theta_1 - 1}{(Z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \times \left[\text{Arc tg} \sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}} \text{tg} \frac{\theta_1}{2} \right], \quad (7)$$

et sont représentées sur les Figs. 2 et 3.

2. EXEMPLE D'APPLICATION

L'exemple donné maintenant en application de ces calculs concerne le modèle rudimentaire de tuyère constitué par deux troncs de cônes

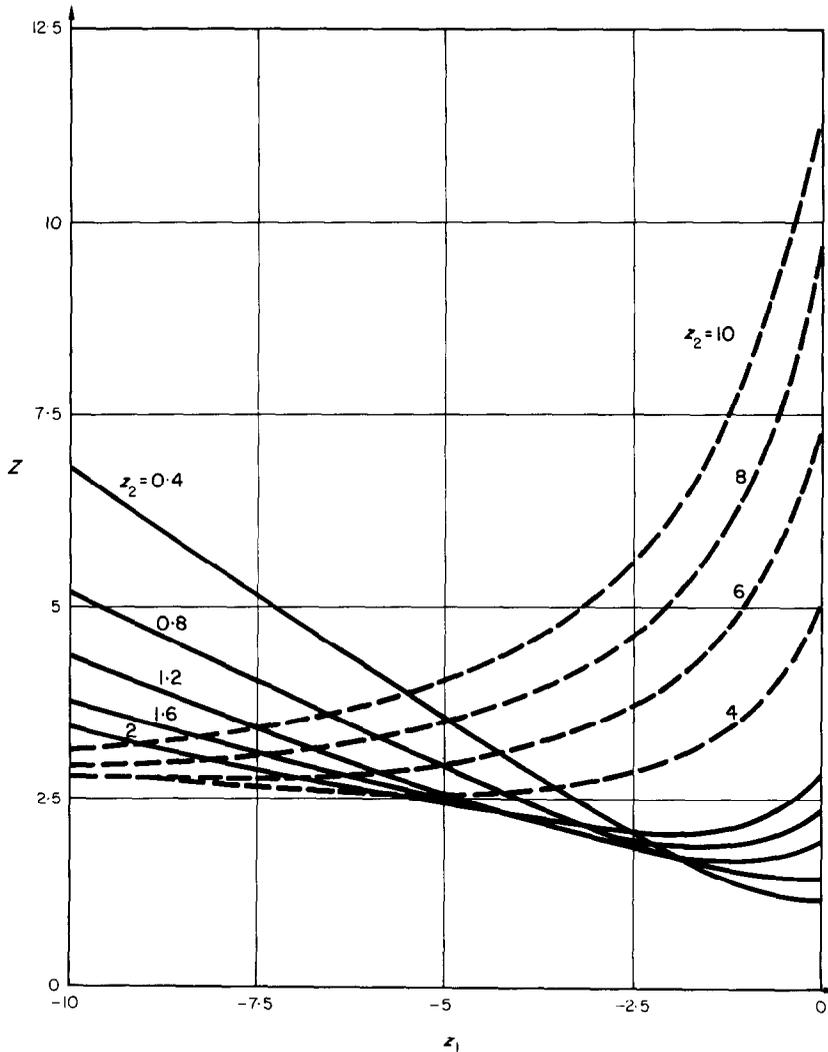


FIG. 6. Valeurs de Z en fonction de z_1 et z_2 pour le modèle simplifié.

coaxiaux raccordés selon un parallèle commun formant le col dont le rayon est pris pour unité de longueur (Fig. 4). Les trois paramètres caractéristiques $\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$ et Z ont été calculés pour des demi-angles au sommet

CONCLUSION

Les fonctions d'échange de chaleur par rayonnement mutuel de deux anneaux élémentaires d'une surface de révolution sont ainsi entièrement explicitées en fonction des caractéristiques géométriques de la méridienne et, finalement, de leurs seules positions axiales. L'évolution dans le temps des températures locales de la surface constitue alors un problème unidimensionnel [4, 5] qui peut être résolu assez simplement en introduisant les coefficients

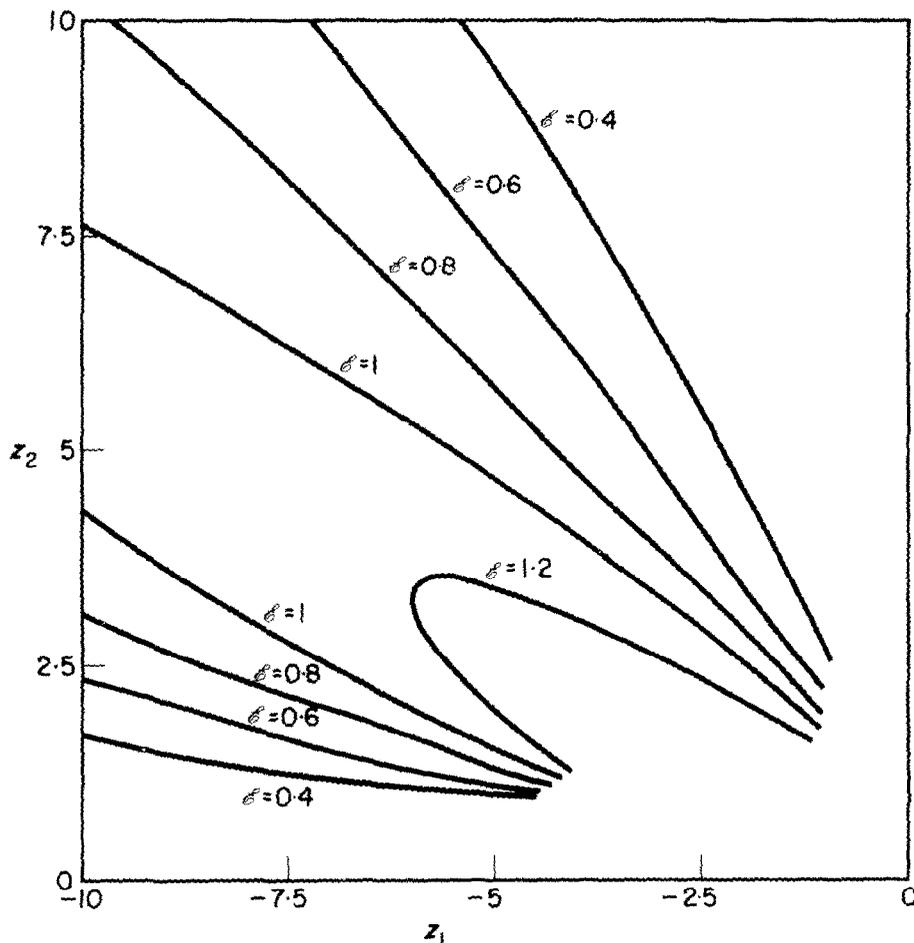


FIG. 7. Valeurs de ϵ_{12} en fonction de z_1 et z_2 pour le modèle simplifié.

$\omega_1 = \pi/6$ et $\omega_2 = \pi/3$: ils sont représentés en fonction de z_1 et z_2 sur les Figs. 5 et 6.

Les fonctions universelles \mathcal{A}_{12} et \mathcal{B}_{12} définies précédemment permettent alors de calculer facilement en fonction de z_1 , z_2 les facteurs d'échange ϵ_{12} représentés sur la Fig. 7.

téristiques géométriques de la méridienne et, finalement, de leurs seules positions axiales. L'évolution dans le temps des températures locales de la surface constitue alors un problème unidimensionnel [4, 5] qui peut être résolu assez simplement en introduisant les coefficients

d'échange obtenus, soit dans un programme d'ordinateur, soit dans un simulateur analogique [6-9]. Un catalogue de ces facteurs est en préparation [10] pour diverses configurations de tuyères.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. M. SPARROW and A. HAJI-SHEIK, A generalized variational method for calculating radiant interchange between surfaces, *Trans. ASME*, Paper No 64-HT-11 (1964).
2. G. RIBAUD et E. BRUN, *Transmission de la Chaleur. Tome 1. Le Rayonnement Thermique*. Sennac, Paris (1948).
3. R. CADIERGUES, Les fonctions d'échange et leur application à l'éclairage naturel et artificiel au chauffage et au conditionnement, *Cahiers du Bâtiment*, 33, Paris (Jan. 1949).
4. G. GRUBER, A method for calculating wall temperatures in a radiation cooled rocket nozzle, *Pyrodynamics* 1, 251-263 (1964).
5. L. A. GLENN and S. DE SOTO, An analog method for the solution of unsteady radiant heat-transfer problems with combined conduction and convection, *J. Spacecraft* 3, 224-230 (1966).
6. A. K. OPPENHEIM, Radiation analysis by the network method, *Trans. ASME* 78, 725-735 (1956).
7. R. VICHNIEVSKY, Modèles analogiques et transmission de chaleur, *Revue de l'I.F.P. et Ann. des Combustibles Liquides* XVII, 537-557 (1962).
8. P. HUARD DE LA MARRE, Résolution de problèmes d'infiltration à surface libre au moyen d'analogies électriques, PST du Ministère de l'Air, n° 340 (1958).
9. L. LABBÉ, Représentation électrique de champs thermiques par réseau de résistances, Journées Internationales de la Transmission de la Chaleur, I.F.C.E., 19-24 juin (1961).
10. J. J. BERNARD et J. GENOT, Catalogue de facteurs d'échange pour le calcul du rayonnement des tuyères de révolution. Note technique Onera à paraître.

THERMAL RADIATION OF AXISYMMETRIC SURFACES

Abstract—The transfer function to be introduced in the calculation of radiative heat transfer is formulated for two annular elements of an axisymmetric surface which gives a schematic representation of a propeller and its radiative interactions with itself, the wall of the missile or the outer-space. The parts of the surface effectively interacting and the transfer function are dependent upon three characteristic parameters determined by the geometrical shape of the surface and the positions of the annular elements. A simple practical application of the method is given.

WÄRMESTRAHLUNG BEI ACHSSYMMETRISCHEN FLÄCHEN

Zusammenfassung— Die Übertragungsfunktion, die man in die Berechnung der Wärmeübertragung durch Strahlung einführen muss, wird für zwei Ringelemente einer achsensymmetrischen Fläche formuliert. Sie gibt eine schematische Darstellung eines Propellers und seiner Wechselwirkung durch Strahlung mit sich selbst, mit der Wand eines Geschosses oder mit dem Weltraum. Die Teile der Fläche, die effektiv miteinander in Wechselwirkung treten, und die Übertragungsfunktion sind von drei charakteristischen Parametern abhängig, die durch die Geometrie der Fläche und die Lage der Ringelemente bestimmt sind. Es wird eine einfache praktische Anwendung dieser Methode gegeben.

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Аннотация—Функция переноса, вводимая в расчёты радиационного теплообмена, формулируется для двух кольцевых элементов осесимметричной поверхности, которая даёт схематическое представление о двигателе и его радиационном взаимодействии с самим собой, стенкой ракеты и окружающим пространством. Эффективно взаимодействующие участки поверхности и функция переноса зависят от трёх характерных параметров, определяемых геометрической формой поверхности и расположением кольцевых элементов. Приводится пример простого практического применения этого метода.